Progressões Geométricas

Termo geral de uma PG

Em uma progressão geométrica (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) de razão q, partindo do 1º termo, para determinar o segundo termo basta multiplicar o 1º termo pela razão q ($a_2 = a_1q$); para determinar o terceiro termo, basta multiplicar o 1º termo duas vezes pela razão q ($a3 = a_1q^2$); e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem n, denominado termo geral da PG, que é dado por:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Nessa fórmula:

a_n = termo geral;
a, = 1º termo;
n = número de termos (até a_n);
q = razão.

Fórmula da Soma dos termos da PG.

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$, é dada por

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.}$$

Observação: Quando queremos calcular, ou apenas saber o que acontece com uma função f(n), quando $n \to \infty$. Utilizamos a seguinte notação:

$$\lim_{n\to\infty} f(n)$$

Como para as progressões geométricas não finitas, e tais que | q | < 1, o $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, pois q = 1/x para um x grande e $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-0)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Portanto as progressões geométricas não finitas tais que | q | < 1 possuem como limite da soma de infinitos termos a expressão

$$\boxed{S_n = \frac{a_1}{1-q}}$$

Produto dos termos de uma PG finita

$$\boxed{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

ou, se todos os termos são positivos,

$$\boxed{P_n = (a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}}}$$

Propriedades

1. Se três números a, b e c estão nesta ordem em PG, e a **razão** desta PG é **positiva**, então b é a média geométrica de ab, ou seja, $b = \sqrt{ac}$

Prova: Denotemos b = aq e c = aq². Temos que $\sqrt{a \cdot c} = \sqrt{a \cdot aq^2} = aq = b$.

2. Produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto desses extremos. **(Use esta propriedade para provar a afirmativa do exercício 2 a seguir)**

1. **(UFRJ)** Sejam *x* = 1 e *y* = 0,999... (dízima periódica). Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?
a) *x* < *y*
b) *x* > *y*
c) *x* = *y*
Justifique rigorosamente sua resposta.

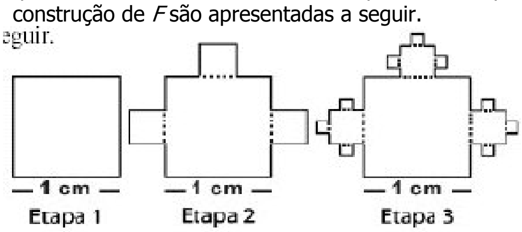
2. **(Unirio)** Uma Progressão Geométrica(P.G) apresenta módulo do produtório de seus termos ($|P_n|$), dado pela fórmula $|P_n| = |a_1 \cdot a_n|^{n/2}$

3. Dado um retângulo de lados a, b e área A, a condição para que a, b e A formem nessa ordem uma PG é:
a) a = 2b c) $a^2 = b$
b) $a^2 = 2b$ d) $b^2 = 2^a$
c) n.r.a

4. **(UFRJ 05)** O número de bactérias em uma certa cultura dobra a cada hora. A partir da amostra inicial, são necessárias 24 horas para que o número de bactérias atinja uma certa quantidade Q. **Calcule quantas horas são necessárias para que a quantidade de bactérias nessa cultura atinja a metade de Q.**

5. **(PUC-SP)** O terceiro e o sétimo termo de uma progressão geométrica valem, respectivamente, 10 e 18. O quinto termo dessa progressão é:
a) 14. b) $\sqrt{30}$ c) $2\sqrt{30}$.
d) $6\sqrt{5}$. e) 30.

6. **(UFRJ)** A região fractal *F*, construída a partir de um quadrado de lado 1cm, é constituída por uma infinidade de quadrados e construída em uma infinidade de etapas. A cada nova etapa consideram-se os quadrados de menor lado (L) acrescentados na etapa anterior e acrescentam-se, para cada um destes, três novos quadrados de lado L/3. As três primeiras etapas de construção de *F* são apresentadas a seguir.



Calcule a área de *F*.

7. Sendo x e y positivos calcule:
a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\dots}}}}}$
b) $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{\dots}}}}}$

8. Os lados de um triângulo retângulo estão em progressão geométrica. Entre que valores pode variar a razão dessa PG.?

9. A soma de três números em PG é 19. Subtraindo-se 1 do primeiro desses formam uma PA. Calcule-os.

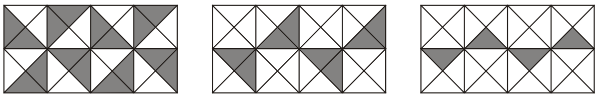
10. Para obter a soma 1 + 2 + ...+ 99 + 100, o matemático Carl F. Gauss observou que 1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 e etc., num total de 50 vezes. Utilizando um processo análogo determine o produto dos termos da PG finita (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024).

11. **(UEL-PR)** A seqüência (2x + 5, x + 1, x/2, ...) com $x \in$ R, é uma progressão geométrica de termos positivos. O décima terceiro termo dessa seqüência é:
a) 2. b) 3^{-10}. c) 3. d) 3^{10}. e) 3^{12}.

12. **(Vunesp-SP)** Considere as seqüências (a_n) e (b_n) definidas por $a_{n+1} = 2^n$ e $b_{n+1} = 3^n, n \geq 0$. Então, o valor de $a_{11}b_6$, é:

a) $2^{11} \cdot 3^6$ b) 12^5. c) 5^{15}. d) 6^{15}. e) 6^{30}.

13. **(UFF-00)** Os retângulos R_1, R_2 e R_3, representados na figura, são congruentes e estão divididos em regiões de mesma área.

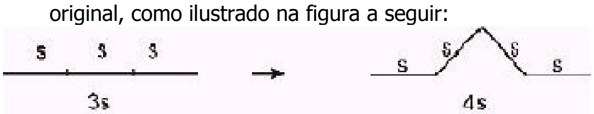


R_1 R_2 R_3

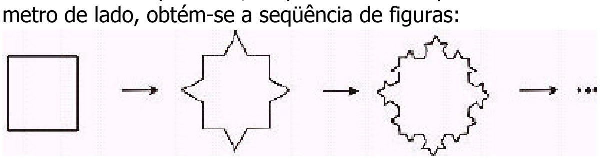
Ao se calcular o quociente entre a área da região pintada e a área total de cada um dos retângulos R_1, R_2 e R_3, verifica-se que os valores obtidos formam uma progressão geométrica (P.G.) decrescente de três termos. A razão dessa P.G. é:

a) 1/8 b) ¼ c) ½ d) 2 e) 4

14. **(UFF 00)** Certas imagens captadas por satélites espaciais, quando digitalizadas, são representadas por formas geométricas de aspecto irregular ou fragmentado, conhecidas por fractais. Podem-se obter tais fractais pela alteração da forma original de uma curva por meio de um processo em que os resultados de uma etapa são utilizados como ponto de partida para a etapa seguinte. Considere o processo tal que, em todas as etapas, cada segmento de reta é transformado em uma poligonal cujo comprimento é quatro vezes a terça parte do segmento original, como ilustrado na figura a seguir:



Por esse processo, a partir de um quadrado com 1 metro de lado, obtém-se a seqüência de figuras:



O perímetro, em metro, do quinto polígono dessa seqüência é:

a) $4^4 / 3^4$ b) $4^4/3^5$ c) $4^5/3^4$ d) $3^5/ 4^5$ e) $3^4/4^1$

15. (UFRJ 99) Uma progressão geométrica de 8 termos tem primeiro termo igual a 10. O logaritmo decimal do produto de seus termos vale 36. **Ache a razão da progressão.**

16. (UFF 00) Numa progressão geométrica (P.G.) decrescente o primeiro termo é um número real positivo e cada termo, a partir do terceiro, é igual à sexta parte da soma dos dois termos imediatamente anteriores. Determine a razão dessa P.G.

17. (UFF 99) Considere a seqüência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ tal que $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_{n+1} = 0{,}5\, x_n$. Determine o valor de k de modo que $x_k = 2^{-10}$.

18. Considere

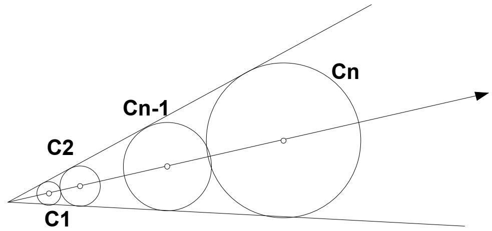
$$S = (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{8}(x-1)^2 + \ldots$$

Calcule x de modo que S = 2.

19. Calcule

$$S = \frac{1}{\log_a 2} + \frac{1}{\log_{2a} 2} + \frac{1}{\log_{4a} 2} + \ldots + \frac{1}{\log_{2^m a} 2}, 0<a \neq 1,\ m \in \mathbb{N}^*.$$

20. A figura seguinte mostra uma seqüência de circunferências $C_1, C_2, C_3 \ldots, C_n$ de raios $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, respectivamente, tangentes aos lados de um ângulo de medida 2α. Cada circunferência C_k é tangente ás circunferências C_{k-1}, C_{k+1}, para $K \geq 2$.



a) Prove que $\frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{1+\text{sen}(a)}{1-\text{sen}(a)}$

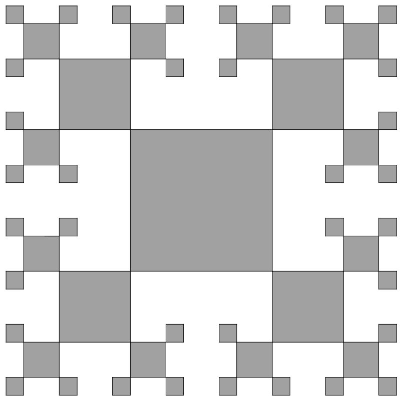
b) Pode-se concluir que os raios dessas circunferências estão em PG? Justifique.

c) Suponha que a seqüência comece em C_n, $r_n = 5$ e que exista uma infinidade de circunferências. Denotando O_n o centro de C_n se AO = 10 Determine a soma das áreas dessa infinidade de círculos.

21. A figura seguinte é construída da seguinte maneira:

1. constrói-se um quadrado Central de 2cm de lado.
2. Em cada vértice do quadrado central acrescentam-se quadrados de 1 cm de lado.
3. Em cada vértice livre dos quadrados constrói-se quadrados de 1/2 cm de lado

E assim, sucessivamente, em cada novo estágio, constroem-se quadrados de lados iguais a metade do lado do quadrado construído no estágio anterior.



Supondo que esta seqüência continue indefinidamente, qual é o limite das áreas dos infinitos quadrados?

Exercícios PA e PG

22. **(UFF 99)** São dadas duas progressões: uma aritmética (P.A.) e outra geométrica (P.G.). Sabe-se que:

- a razão da P.G. é 2;
- em ambas o primeiro termo é igual a 1;
- a soma dos termos da P.A. é igual à soma dos termos da P.G.;
- ambas têm 4 termos.

Pode-se afirmar que a razão da P.A. é:

a) 1/6 b) 5/6 c) 7/6 d) 9/6 e) 11/6

23. **(UFF 98)** Determine a soma dos 100 primeiros termos da progressão geométrica (a_1, a_2, a_3, ...), sabendo que $\log_{10} a_n = n - 1$, $n \in N^*$.

24. **(UFF 02)** Os termos gerais de duas seqüências são dados, respectivamente, por:

$$x_n = \frac{1}{2^n} \text{ e } y_n = \frac{1}{\sqrt{x_n}}$$

Considere a seqüência de termo geral

$$a_n = \frac{(x_n - x_{n+1}) \cdot y_n}{2}$$

e calcule:

a) a razão da progressão geométrica {a_1 , a_2, ..., a_n,..};

b) a soma infinita S = $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

25. **(UFF 05)** A soma dos n primeiros termos da seqüência de números reais a_1, a_2, ..., a_n, ... é $\frac{n^2}{3}$, para todo inteiro positivo n.

a) Verifique se a seqüência é uma progressão geométrica ou uma progressão aritmética ou nenhuma das duas. Justifique sua resposta.

b) Calcule o milésimo termo da seqüência.

26. **(PUC-SP)** Se $\log_3 a$, $\log_3 b$ e $\log_3 5$ formam uma progressão aritmética de razão ½, então, conclui-se que a seqüência 2 (a, b, 5):

a) é uma progressão aritmética de razão 1

b) tem a = 5/3

c) é uma progressão geométrica de razão ½ .

d) é uma progressão geométrica de razão 1/8.

e) tem a = 4.

27. **(UFF-2001-p2)** Considere o conjunto X dos números racionais da forma 3/p, com $p \in Z+$, tais que p e 3 são primos entre si. A soma dos elementos de X que são maiores que 5 e menores que 12 é :

a) 17 b) 51 c) 119 d) 170 e) 510

28. **(UFF 96)** Numa progressão aritmética com 51 termos, o 26º é 2. A soma dos termos dessa progressão é:

a) 13 b) 52 c) 102 d) 104 e) 112

29. **(UERJ)** Observe a seqüência numérica a seguir:

(0, 3, 8, 15, 24, ...)

Determine, em relação a essa seqüência:

a) seu 6º termo;

b) a expressão do termo de ordem **n**.

30. **(UERJ)** Uma seqüência de cinco átomos está organizada por ordem crescente de seus números atômicos, cujos valores são regidos por uma progressão aritmética de razão 4. Já o número de nêutrons desses mesmos átomos é regido por uma progressão aritmética de razão 5. Se o átomo mais pesado pertence ao elemento ferro e o mais leve possui o número de prótons igual ao número de nêutrons, o número de massa do terceiro átomo da série é:

(A) 18

(B) 20

(C) 26

(D) 38

31. **(FUVEST 03)** No plano cartesiano, os comprimentos de segmentos consecutivos da poligonal, que começa na origem 0 e termina em B (ver figura), formam uma progressão geométrica de razão p, com 0 < p < 1. Dois segmentos consecutivos são sempre perpendiculares. Então, se OA = 1, a abscissa x do ponto B =(x, y) vale:

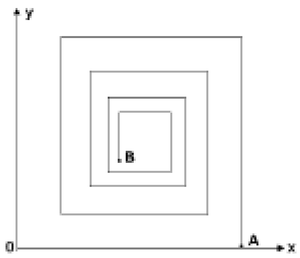
a) $\frac{1-p^{12}}{1-p^4}$

b) $\frac{1-p^{12}}{1+p^2}$

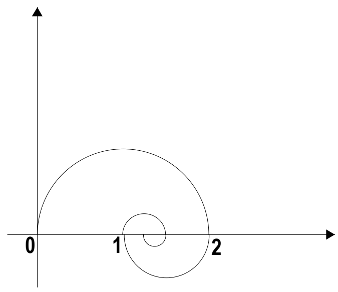
c) $\frac{1-p^{16}}{1-p^2}$

d) $\frac{1-p^{16}}{1+p^2}$

e) $\frac{1-p^{20}}{1-p^4}$



32. Na figura temos uma espiral formada por semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro círculo é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual a metade do raio do semicírculo anterior, determine:



a) o comprimento da espiral infinita.

b) A abscissa do ponto P, ponto assintótico da espiral.

Desafios

33. Calcule as somas:

a) x = 1 + 11 + 111 + 1111 + ... + 111....1, onde a última parcela tem n algarismos 1.

b) Y = 9 + 99 + 999 + 9999 + ... + 9999....9, onde a última parcela tem n algarismos 9.

34. **(IME)** Dada uma circunferência de raio R, inscreve-se nela um quadrado. A seguir, inscreve-se uma circunferência neste quadrado. Este processo se repete indefinidamente para o interior da figura de maneira que cada quadrado estará sempre inscrito e uma circunferência e simultaneamente circunscrito por outra. Calcule em função de R a soma das áreas delimitadas pelos lados do quadrados e pelas circunferências, conforme mostra a figura.